معنای رضایت‌مندی

نویسنده: جیم هنل
مترجمان: فهیمه خوش‌آهنگ قصر، دانشگاه ایلام، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی
مهنا دهگردی، دانشگاه ایلام، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

چکیده

این نوشـــته در مورد ساختارهای ریاضی است که به ما احساس رضایت‌مندی می‌دهند. اینکه بگوییم آن‌ها بدون کاربرد هستند، حرف نامربوطی است. معنا، عمق و حتی حقیقت این ساختارها، به انتخاب خود ما مربوط می‌شود. اگر چیزی در این نوشته مورد مطالعه قرار گرفته است، تنها به این دلیل است که یا دوست‌داشتنی است، یا برانگیزنده کنجکاوی بشر است و یا تنها جنبهٔ سرگرمی دارد. به‌علاوه، این نوعی از تمایلات بشر است.

مقدمه

گاهـــی اوقـــات ســـاختارهای ریاضی بـــه منظور رضایت‌مندی طراحی شـــده‌اند. آن‌ها نه برای خدمت به بشـــر، بلکه برای محســـور کردن خلق شده‌اند، و با مـــا زندگی کرده‌اند، نه تنها به ایـــن دلیل که واقعیت دارند بلکه به این دلیل که ما را محسور و شیفتهٔ خود می‌کنند. این ساختارها، توجه ما را جلب می‌کنند زیرا تعجب و لذت را برمی‌انگیزند.

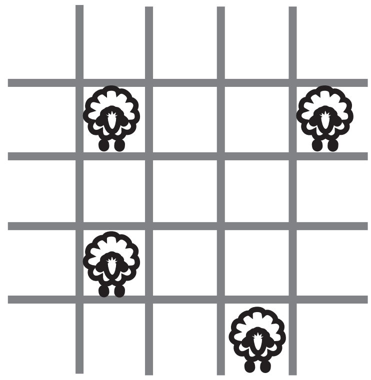
ریاضیاتی که لذت‌بخش است و باعث رضایت‌مندی درونی افراد می‌شود، تازه نیست. اما من فکر می‌کنم که برخی مسائل در صد سال گذشته و یا بشتر از آن تغییر کرده اســـت. ریاضیاتی که به‌طور خاص برای احساس رضایت خلق شده، امروزه مورد توجه بیشتری قرار گرفته است و در این زمان، به نظر می‌رسد که ریاضی‌دانان (یا اشخاص دیگر) بیشتری باشند که خوشی‌های فردی یا عمومی‌شان، علت رضایت‌مندی مخلوقات ریاضی‌شان باشد. ســـاختارهای ریاضی متقاعدکننده، افرادی که آن‌هـــا را پیدا می‌کنند و یا می‌ســـازند و جامعه‌ای که پذیرای آن‌ها می‌شوند، علت تمرکز این نوشتار بر این موضوع است.

من اینک این بحث را با صحبت کوتاهی در مورد ســـاختارهای ریاضی، لذت‌های ریاضی و غرض اصلی از خلق آن‌ها آغاز می‌کنم، ســـپس به شـــما پدیده‌ای غیرمنتظره را نشان خواهم داد.

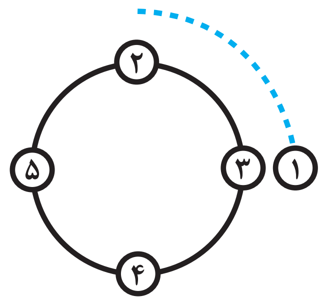
درایـــن جهان، تخصص ریاضی امری ویژه اســـت. اما مهم‌تر از آن، توانایی درک زیبایی ریاضی اســـت و از همه مهم‌تر، داشـــتن هوش و حساسیت برای خلق ســـاختارهای زیبای ریاضی است که آنچنان که معلوم است، چندان هم نایاب نیست. من در سال گذشته، یک دورهٔ آموزشـــی برای دانشجویان برگزار کردم که برای آن، هیچ پیش‌زمینهٔ ریاضی مورد نیاز نبود. من بعد از آنکه به آن‌ها برخی پیش‌نیازها و برخی مطالب مربوط به زیبایی‌های ریاضی را آموزش دادم، از دانشـــجویان خواستم که ســـاختارهایی را خلق کنند آن‌ها چنین کردند و به نتایج زیبایی دست یافتند.

وقتی این مقدمه به پایان رسید، به شما سه نمونه از این نتایج را نشان خواهم داد:

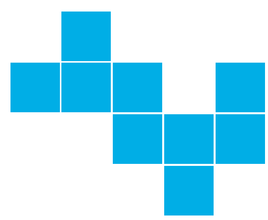
یک پازل (جورچین)



یک رقص (حرکت موزون)



و ... ساختار دیگر



ساختارهای ریاضی

ما نمی‌خواهیم با «ریاضی» سر و کار داشته باشیم. متأسفانه تعریف «ریاضی» به شکل وحشتناکی دشوار است. فیلسوفان و ریاضی‌دانان از دیرباز، بر سر مسائلی چون حقیقت، بصیرت، معنا و وجود، نزاع داشته‌اند. به جای «ریاضی»، ما «ساختارهای ریاضی» را مورد بحث قرار خواهیم داد. به نظر می‌رسد که تعریف این موضوع، تا حدی آسان اســت. من به‌طور ساده به دانشجویانم می‌گویم که:

> *یک ساختار ریاضی چیزی اســت که بتوان آن را به‌طور کامل و بدون هیچ ابهامی، شرح داد.*

هر چیزی که ما به‌طور طبیعی به‌عنوان یک ساختار ریاضی می‌شناسیم، در این تعریف صدق می‌کند. اما هر چیزی در جهان فیزیکی، در این تعریف صدق نمی‌کند.

این تعریف، برای هر کس با معلومات ابتدایی ریاضی، تعریف کامل است. بسیاری از افراد، از کلاس‌های ریاضی خود پشیمانی و اضطراب را به خاطر می‌آورند. آن‌ها با زبان و ادبیات، راحت‌تر هســتند. بنابراین برایشان این تعریف ساده‌تر و معنادارتر است.

این تعریف، نه چیزی دربــارۀ جذابیت، زیبایی یا اهمیت یک ســاختار می‌گوید و نه در مورد توانایی آن ساختار در ایجاد رضایت‌مندی حرفی به میان می‌آورد. این‌ها چیزهایی است که در بخش بعد خواهیم دید.

رضایت‌مندی از ریاضی

ساختارهای موجود در این قسمت، باید بر اساس حس رضایتی که برایمان فراهم می کنند، مورد قضاوت قرار گیرند. بسیار سخت است که مفهوم رضایت‌مندی یا لــذت بردن از ریاضی را تشــریح نمــود. قطعاً این رضایت‌مندی، شامل آنچه که ما آن را به‌عنوان زیبایی ریاضی می‌شناسیم، خواهد بود. اما رضایت‌مندی ریاضی بیشتر از این است. برای مثال، رضایت‌مندی حل یک مســئله، رضایت‌منــدی دیدن یک راه‌حــل ریاضی و رضایت‌مندی‌ای که از یک مســئلۀ گیج‌کننده وجود دارد، بخشی از این رضایت‌مندی‌ها است.

رابرت توماس[1] می‌گوید که ظرافت‌ها و زیبایی‌های ریاضی، باید شامل حس رضایتی باشد که توسط یک کار تولید می‌شود. توماس تعریف مؤثر و قابل استفادۀ زیر را پیشنهاد می‌دهد:

> *اگر یک ســاختار ریاضی مورد علاقه واقع شود، به بازی گرفته شــود، مورد بررسی قرار گیرد و کشف شود، آن‌گاه آن ساختار ریاضی، ایجاد رضایت درون می‌کند.*

هدف

میراثی غنی وجود دارد که شامل ریاضیاتی است که باعث رضایت‌مندی می‌شود. ما وارثان سه هزار سالۀ چیزهای باشــکوه هســتیم. در هر حال، آنچه علاقه و توجه مرا به خود جلب کرده، ریاضی است که به خودی خود، جذاب است.

دانستن نیت خالق یک ساختار، دشوار است. برای ریاضی‌دانــان قبل از ســال ۱۹۰۰، مطمئن بودن در مورد آنچه مورد توجهشان بوده است، تا حدی ناممکن

بود، در صورتی‌که برای ریاضی‌دانان معاصر، شـــواهدی برای مطمئن شـــدن، موجود اســـت. در ســـتونی که مارتین گاردنر[۲] در مجلهٔ ساینتیفیک امریکن[۳] داشت، از ریاضی به‌طور مستمر، تجلیل می‌شد. در آن ستون، ساختارهایی توسط جان هورتون کانوی[۴]، دونالد نات[۵] و بسیاری دیگر به ما معرفی می‌شدند که این ساختارها، به‌وضوح برای قلقلک دادن، گیج کردن، تحریک نمودن، متعجب کردن و ســـردرگمی خوانندگان طراحی شده بودند. وجود ســـتون گاردنر در این مجله، ریاضی‌دانان را برانگیخت که ساختارهایی تولید کنند، که می‌توانند خیره‌کننده یا فریبنده باشند.

این نوشته، ممکن است به چه جاهایی برسد؟

امیدوارم در مجله‌های مختلف ستون‌هایی در مورد مسائل زیر تولید شوند:

- آثار پدیدآورندگان فردی مانند کانوی، نات، پیت هین[۶] و زنده‌یاد ریموند اسمولیان[۷]؛
- ژانرها یا زیرژانرهای خاص: بازی‌های برد و باخت، نظام‌های شمارشی، شـــگردهای بازی با کارت و نظایر آن؛
- خلاقیت نیکولی[۸]؛
- لوکا پاسولی[۹] و دوریبس کوانتیتاتیس[۱۰]؛
- بازی های سید ساکسون[۱۱]؛
- پازل‌های جعبه امتیاز از جری باترز[۱۲]؛
- رقص‌ها و ملودی‌های مختلف؛
- جدال‌هایی بر ســـر ســـاختارها، هنرهای زیبا، و تاریخ؛
- مسابقات قهرمانی پازل یو. اس[۱۳]
- و (هر زمان که امکان داشت) آخرین موضوع‌های جدید.

و اکنون، از دانشجویانم می‌خواهم که به موضوع‌های جذاب زیر، فکر کنند.

یک شکل جورچین

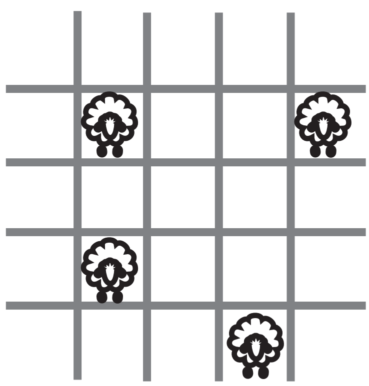
جورچین‌ها می‌توانند ساختارهایی ریاضی باشند. آن‌ها یقیناً می‌توانند لذت‌بخش باشـــند. اما وقتی یک پازل حل می‌شود، بیشتر جذابیتش را از دست می‌دهد! اکثر ما، وقتی ســـودوکو حل می‌کنیـــم (یا حتی آن را خراب می‌کنیـــم) دورش می‌اندازیم. اما ســـودوکو را به‌عنوان یک شـــکل پازلی در نظر بگیرید و به آن، به شـــکل مجموعه‌ای از قوانین بنگرید که برای آن، یک پازل سودوکو تشـــکیل شده است. به‌عنوان یک شکل پازلی، ســـودوکو به گونه‌ای شـــگفت‌آور، یک ساختار ریاضی موفق اســـت که همـــگان آن را با آغوش گرم پذیرفته‌اند. هزاران و شاید صدها هزاران جدول سودوکو ساخته شده و مورد رضایت‌مندی واقع شده است.

ســـودوکو، اختراعی از یک معمار آمریکایی به نام هوارد گارنز[۱۴] است که نخستین جداول سودوکو را در سال ۱۹۷۹ منتشـــر کرد. من مطمئنم هدف گارنز از اختراعش، لذت بردن از آن بود.

مـــا اکنون در عصـــر طلایـــی جورچین‌ها زندگی می‌کنیم. امروزه سودوکو، توسط شماری از شکل‌های پازلی جذاب ادامه یافته است. شرکت انتشاراتی ژاپنی نیکولی مســـئول بسیاری از این‌ها اســـت. شیکاکو[۱۵]، ماسیو[۱۶]، نوریکاب[۱۷] و اسلیترلینک[۱۸]، پازل‌های بسیار زیاد دیگری ساخته‌اند.

یک سال پیش، دانشـــجوی من اواماری اولسون[۱۹] جورچینی ســـاخت که آن را «نجات گوسفند» نامیده بود.

یک جورچین نجات گوسفند، یک صفحهٔ شطرنجی با گوسفندهاست (شکل ۱.)



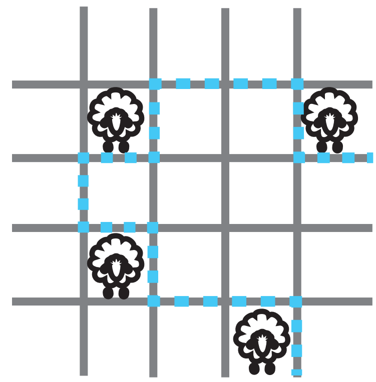
شکل ۱. یک جورچین نجات گوسفند

برای حل این جورچین، شما باید حصاری بکشید که همهٔ گوســـفندان، در یک ســـمت آن باشند. با این قوانین که حصار نمی‌تواند از یک نقطه از این شـــبکه شطرنجی دو مرتبه عبور کند و باید دقیقاً شامل دو ضلع از هر مربعی باشد که گوسفندی در آن است (شکل ۲.)

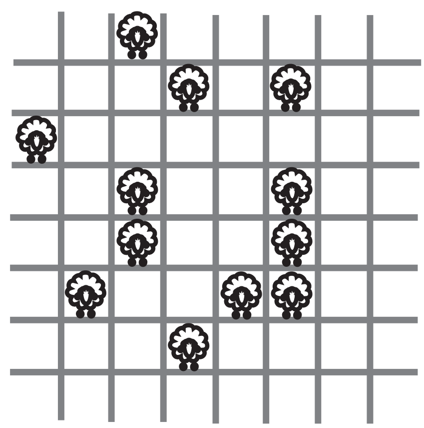
خوشـــبختانه، من هدف اوامار‌ی را از ساخت این جورچین می‌دانم. زیرا مسئله‌ای که به‌عنوان تکلیف به آن‌ها داده بودم، خلق یک شـــکل جورچین لذت‌بخش بود.

در شکل ۳، جدول نجات گوسفند پیچیده‌تری را مشاهده می‌کنید.

آیا این شـــکل جورچین، خوب است؟ چطور آن را ارزیابی می‌کنیـــم؟ در این مرحله، نمی‌توانم بگویم که بازی نجات گوسفند تا چه حد موفق است.



شکل ۲. یک راه‌حل برای جورچین نجات گوسفند شکل ۱



شکل ۳. یک جورچین نجات گوسفند پیچیده

تنها می‌توانم بگویم کـــه این بازی، مرا جذب کرد و البته در پیدا کردن بهترین مسیر، مجذوبم کرد. من خواســـتم که بازی‌های نجات گوسفند را بسازم و برای این کار، با حسی منطقی در ریاضی به سمت آن کشیده می‌شدم. می‌خواستم احتمالات ممکن را کشف کنم.

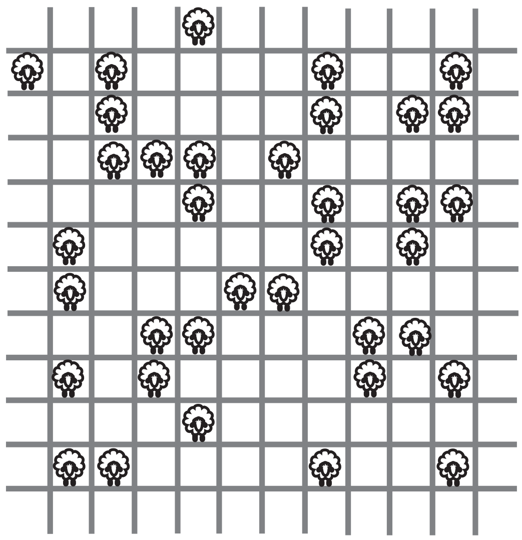
چیزی که در شکل ۴ با آن روبه‌رو شدم، یک پازل نجات گوسفند واقعاً پیچیده است که تنها یک جواب دارد.

مـــن جواب‌های این پازل را در زمان مناســـب در سایت زیر خواهم گذاشت:

www.math.smith.edu/jhenle/pleasingmath/

اگر شما هم با این شکل جورچین سر و کله زده‌اید، جورچین‌های نجات گوسفند خود و همچنین نظراتتان را برایم به آدرس زیر ارسال کنید.

pleasingmath@gmail.com



شکل ۴. یک پازل نجات گوسفند پیچیده‌تر

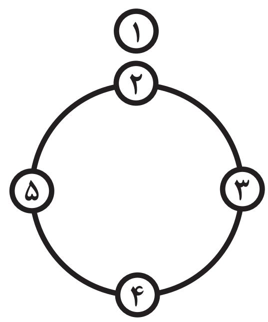
یک رقص

واقعیت، یک ساختار ریاضی نیست. اما جنبه‌هایی از واقعیت، ریاضی‌وار هســـتند. رقص را در نظر بگیرید. تشریح حرکات و حدس‌های یک رقصنده به‌طور کامل و بدون ابهام، ناممکن است. از طرف دیگر، اگر ما توجهمان را به مکان قرار گرفتن رقصندگان در زمین‌های قسمت بندی شـــده (مثلاً روی یک صفحهٔ شطرنجی) محدود کنیم، آن‌گاه ما یک ساختار ریاضی داریم. نمونه هایی از دســـتگاه‌های نمادیـــن برای بســـیاری از مدل‌های رقص موجود اســـت و این نمونه‌ها، متضمن جنبه‌های ریاضی‌شان است. دانشجویان من -کونی آدامسون[۲۰]، ویکتوریا نومپلگی[۲۱]، هلی پترسون[۲۲] و دیزایر ویولا[۲۳]- با بهره‌گیری از ســـاختار ریاضی، یک نمونه رقص ابداع کردند. پنج رقصنده که با شـــماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نام‌گذاری شده‌اند، ممکن است شبیه شکل ۵ رقصیدن را آغاز کنند.

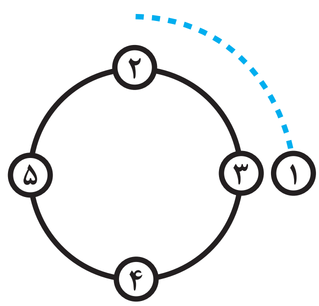
در ایـــن رقـــص کـــه آن را «اردک، اردک، غاز»[۲۴] نامیده‌اند، یک رقصنده از بیرون دایره، در جایگاه بالایی شـــروع می‌کند. زمانی که رقص شـــروع می‌شود او در جهت حرکت عقربه‌های ساعت یک گام حرکت می‌کند زیرا او شماره «۱» است (شکل ۶). سپس رقصنده‌های ۱ و ۳ مکانشـــان را با هم عوض می‌کنند و ۳ سه مکان حول دایره حرکت می‌کند، به این دلیل که او رقصندهٔ شماره «۳» است (شکل ۷.)

اکنون رقصندگان ۳ و ۲، مکانشـــان را با هم عوض می‌کنند و رقص به شیوه‌ای مشابه ادامه می‌یابد تا زمانی که به شکل اولیه بازگردند.

«اردک، اردک، غـــاز» خصوصـــاً یکـــی از ابداع‌کننده‌هایـــش را گیـــج کرد. هِلـــی دریافت که ۲۰ گام لازم اســـت که به ترکیب اولیه بازگردند. او می‌خواست دلیل این امر را بداند. آغاز کردن رقص با ترکیب‌های دیگری از پنج رقصنده به ارقام متفاوتی از گام‌ها و جهت بازگشت به ترکیب نخستین، منجر می‌شد: ۲، ۴، ۳۶



شکل ۵. آغاز رقص اردک، اردک، غاز



شکل ۶. حرکت رقصندهٔ شماره «۱»

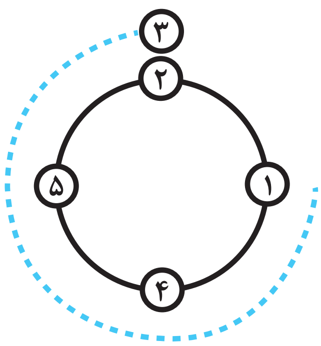
و مانند آن مثلاً برای این ترکیب (شـــکل ۸)، ۲۲ مرحله لازم بود که به شـــکل اولیه بازگردند. چرا ۲۲؟ و او می‌خواســـت بداند که چرا همهٔ ایـــن ارقام زوج هستند؟

ما (خودم و کلاســـم) برای مشـــاهدهٔ این ساختار، مجدداً باید به قضاوت منتقدین تکیه کنیم. من دریافتم کـــه «اردک، اردک، غاز» به انـــدازهٔ کافی جالب توجه هست که برنامه‌هایی را برای کشف آن در نظر بگیریم. اگر هر خواننده‌ای در این خصوص دیدگاهی دارد با من (و هلی) در میان بگذارند!

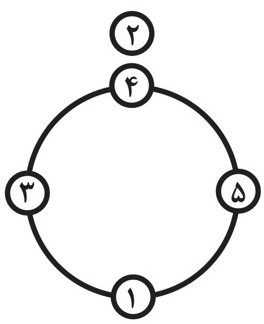
خلاقیت ریاضی آن‌قدرها هم نادر نیست

خلق یک ســـاختار ریاضی، سخت نیست. این امر، نبوغ ریاضی خارق‌العاده‌ای نمی‌خواهد. اما یک ساختار ریاضی شگرف چطور؟ یک ساختار ریاضی که لذت‌های ریاضی‌وار نصیبمان می‌کند چطور؟

خلق ســـاختارهای دلپذیر هم دشوار نیست. این امر شـــبیه گرفتن عکس‌های فوق‌العاده اســـت. یک عکاس واقعی، عکس‌های فراوانی می‌گیرد. او بیشـــتر آن‌ها را دور خواهد انداخت. بهترین‌هایشـــان نســـبتاً خوب هســـتند. اما فقط یکی ممکن است تماشایی و چشم‌گیر باشد.

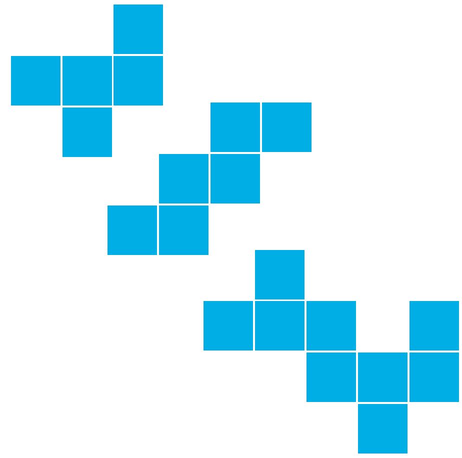


شکل ۷. حرکت رقصنده شماره «۳»



شکل ۸. ترکیب آغازین دیگر برای رقص اردک، اردک، غاز

یکی دیگر از دانشـــجویان کلاس، ساشا رزنتال[۲۵]، چیزی را کـــه آن را «چند ضلعی بی‌نهایت[۲۶]» نامید، ابداع کرد. در اصل، او یک دســـتهٔ جدید از شکل‌ها را تعریف کرد. شـــکل‌های او، از یک صفحه شطرنجی از مربع‌های واحد، در طول خطوط این صفحه شطرنجی بریده شده است. ساشـــا می‌خواست که تعداد اضلاع این شکل‌ها، دقیقاً دو برابر دو برابر مساحت آن‌ها باشد (شکل ۹).



شکل ۹. چند ضلعی‌های بی‌نهایت

من قصد دارم که این اشکال را «ناگل»[۲۷] بنامم زیرا همان‌طور که می‌بینید، شبیه آجرهای دیوار روی هم چیده شده، هستند.

از هـــر یک از اندازه‌های دو و ســه، تنها یک ناگل موجود است. هیچ ناگلی از اندازهٔ ۱ موجود نیست، اما ساشا یک مربع تک را هم به‌طور افتخاری یک ناگل در نظر گرفت.

شما با ناگل‌ها چه می‌کنید؟ می‌توانید آن‌ها را کنار هم بگذارید که شکل‌های جدید بسازید، شبیه شکل‌های سولمون گولومب[۲۸] که با پنتومینوها[۲۹] ساخته شده‌اند.

اما امکانات ناگل‌ها بســیار بیشتر از پنتومینوهاست به این دلیل که بی‌نهایت ناگل متمایز وجود دارد. ساشــا از ناگل‌ها، مربع‌های ۲×۲، ۳×۳ و ۴×۴ ســاخت. در هر مورد، همگی «ناگل‌های» مورد استفاده متمایز بودند.

من دریافتم که شما می‌توانید با استفاده از «ناگل‌های» متمایز، هر نوع مربعی را بســازید. اما اینجا یک چالش وجود دارد:

مـــن و ساشـــا متوجـــه شـــدیم کـــه $۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸=۳۶=۶^۲$ و خواســتیم بدانیم که شما می‌توانید یک مربع ۶×۶ با استفاده از یک ناگل از هر یک از هشت اندازهٔ بالا بسازید.

شما می‌توانید. یک پاسخ برای این کار را بعداً (در فرصت مناســب) در وب‌ســایت خواهم گذاشت. عدد مثلثیِ بعدی که آن هم یک مربع کامل اســت، عبارت است از:

$۱+۲+۳+...+۴۸+۴۹=۳۶^۲$

من خودم هنوز این مورد را امتحان نکرده‌ام!

نتیجه نهایی

آخریــن مطلب این اســت که من برای کاســینا متمتیکا[۳۰]، یک فن آموزش ریاضی ارائه دادم که توسط آن، تواناسازی دانشجویان برای رضایت‌مندی از ریاضی در اولویت قرار گرفت. کلاسی که در آن اواماری، کانی، ویکتوریا، هلی، دزایر و ساشــا گوسفند را نجات دادند، با هــم «اردک، اردک، غاز» رقصیدنــد و با «ناگل‌ها» آجرچینــی کردند، تجربه‌ای از این فن آموزشـــی بود. موفقیت‌های بیشـــتری هم وجود دارند که آن‌ها را در نوشته‌های آینده، شرح خواهم داد.

پی‌نوشت‌ها

1. Robert Thomas
2. Martin Gardner
3. Scientific American
4. John Horton Conway
5. Donald Knuth
6. Piet Hein
7. Raymond Smullyan
8. Nikoli
9. Luca Pacioli
10. De Veribus Quantitatis
11. Sid Sackson
12. Jerry Butters
13. U. S. Puzzle Championship
14. Howard Garns
15. Shikaku
16. Masyu
17. Nurikabe
18. Slitherlink
19. EvaMarie Olson
20. Connie Adamson
21. Victoria Nompleggi
22. Haley Peterson
23. Desiree Viola
24. Duck, Duck, Goose
25. Sasha Rosenthal
26. Infinite Polygon
27. Noggles
28. Solomon Golomb
29. Pentominoes
30.Cucina Matematica

منبع

Jim Henle, Meaning to please, The Mathematical Intelligencer, Vol 40, Issue 1, March 2018, 68- 72.